長距離力を持つ n ーベクトル模型の臨界指数

―― 次元，対称性（自由度），ポテンシャル・レインジと臨界指数 ――

東大物性研　　鈴 木 増 雄

一般に，臨界指数は，次元 d，対称性（または自由度 n），ポテンシャル・レインジ σ に依存する。最近，くりこみ群の方法を併用して臨界指数を展開し，d と n の依存性が主に調べられている。[1-5]

ここでは，臨界指数が 3 つのパラメタ d，n，σ にどう依存するかを，$\frac{1}{n}$ ー展開[6] と ε ー展開[1,5] を用いて研究した結果を報告する。 ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) ; \quad J_{ij} = J_0 \, r_{ij}^{-(d+s)} \Big/ \sum_j r_{ij}^{-(d+s)} , \tag{1}$$

で与えられる。[7,8] 但し，$\mathbf{S}_j$ は n 個の連続な値をとる $\{ \sigma_{jk} \}$ を成分とするベクトルである：[7]

$$\mathbf{S}_j = (\sigma_{j1} , \sigma_{j2} , \cdots , \sigma_{jn}) ; \quad \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}^2 = n \tag{2}$$

$n \to \infty$ の極限は，長距離力を持つ spherical model[7] になる。

さて，帯磁率 χ が次の異常性を示すとする：

$$\chi = (T - T_c(\lambda))^{-\gamma(\lambda)} ; \quad \lambda = \frac{1}{n}. \tag{3}$$

その λ に関する微分は，次のようになる：[9]

$$\chi_1 \equiv \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \simeq T_c'(0) \, \gamma(0) \, (T - T_c(0))^{-\gamma(0)-1} - (T - T_c(0))^{-\gamma(0)}$$

$$\times \gamma'(0) \, \ell n (T - T_c(0))$$

$$\simeq T_c'(0) \, \gamma(0) \, \chi_0 \big/ (T - T_c(0)) - \gamma'(0) \, \chi_0 \, \ell n (T - T_c(0)). \tag{4}$$

従って，χ_1 の中の $\chi_0 \, \ell n (T - T_c(0))$ の項を調べることにより，$\gamma'(0)$ がわかり，[9,10]

$$\gamma(\lambda) = \gamma(0) + \frac{1}{n} \gamma_1 + \cdots\cdots \tag{5}$$

と展開形式で臨界指数が求まることになる。今の問題では，Abe[6]によると，χ_1 は次式で表わされる。

$$\chi_1 = -\frac{\mu_B^2}{kT} \times \frac{2N(\xi)}{(2\pi)^d} \int \frac{\mu(q)}{\nu(q)} d^d q \ , \tag{6}$$

但し，$\mu(q) = G(q)\nu(0) - n(q)$，　$N(\xi) = G^2(0)/\nu(0)$，

$$\nu(q) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int G(k) G(q-k) d^d k \ ,$$

$$n(q) = -(2K)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \nu(q)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int G^2(k) G(q-k) d^d q . \tag{7}$$

短距離力（ $s \to \infty$ ）の場合[6]と違って，一般の s の我々の問題では，propagator $G(k)$ は，小さな k に対して

$$G(k) = \frac{K^{-1}}{\xi + ak^{\sigma}} \quad ; \qquad K = \frac{J_0}{kT} \ , \tag{8}$$

となる。[8]但し，σ は，σ を用いて次のように定義された“effective potential－range”である。

$$\sigma = s \ \text{for} \ 0 < s < 2 \quad \text{and} \quad \sigma = 2 \quad \text{for} \ s > 2 . \tag{9}$$

さらに，ξ は，次のような漸近形[8]を持つ温度変数である：

$$\begin{aligned} \xi &\sim (K_c - K)^{\sigma/(d-\sigma)} && \text{for} \quad \frac{d}{2} < \sigma < d \ , \\ &\sim (K_c - K) && \text{for} \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2} d \ , \end{aligned} \tag{10}$$

Wilson[5]に従って，1より大きい任意の実数 d に対して，次の公式により，連続次元 d を導入する：

$$(2\pi)^{-d} \int d^d k \ f(k^{\sigma}) = K_d \int_0^{\infty} k^{d-1} \ f(k^{\sigma}) \, dk$$

$$(2\pi)^{-d} \int d^d k \ f(k^2, k\cdot q) = (2\pi)^{-1} K_{d-1} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \ k^{d-1} (\sin\theta)^{d-2} \times f(k^2, kq\cos\theta) \ , \tag{11}$$

但し，　$K_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} [\Gamma(d/2)]^{-1} .$ 　(12)

このようにして，χ_1 の中の対数異常性を示す項を探すことにより，次の結果が得られる。（但し，$\lambda=0$ のときの帯磁率 χ_0 は $\chi_0=\mu_B^2/(J_0\xi)$ で与えられる。）

（i） classical region：$0<\sigma<\frac{1}{2}d$. この領域では，$\gamma'(0)=0$ となり，少なくとも，$\frac{1}{n}$ の次数までは，臨界指数 γ は $\gamma=1$ となり，分子場理論の値をとる。くりこみ群の方法を用いると，もっと一般に，任意の n に対して，この領域が classicalであることが示される。即ち，$\sigma_c=\frac{1}{2}d$ という臨界値が存在する。ただ，ここで注意すべきことは，χ_1 の計算から，χ には，$\frac{1}{3}d<\sigma<\frac{1}{2}d$ では，次のような“confluent singularity”が存在することが示されることである：

$$\chi \simeq b_1\xi^{-1}+b_2\xi^{-(3-d/\sigma)}+O(1)\ , \tag{13}$$

即ち，σ が $\sigma_c=\frac{1}{2}d$ に近いときには，(13)の第2項は，第1項の異常性よりも弱いけれども，非常に近い発散を示す。このために，Nagle−Bonner[11] の1次元の数値計算では，$\frac{1}{3}<\sigma<\frac{1}{2}$ のところでも，$\gamma>1$ の値が見かけ上，得られたのであろう。

（ii） Non−clssical region：$\frac{1}{2}d<\sigma$. この領域で，$\xi/q^\sigma\ll 1$ に対して，$\mu(q)$，$\nu(q)$ の漸近形を求め，$\mu(q)/\nu(q)$ を調べると，

$$\frac{\mu(q)}{\nu(q)}=-\frac{C}{A}\frac{1}{q^\sigma}-\frac{AD-BC}{A^2}\frac{\xi^{d/\sigma-1}}{q^d}-\frac{E'}{A}\frac{\xi^{(d-2\sigma+2)/\sigma}}{q^{d-\sigma+2}}+((\text{higher}))\ , \tag{14}$$

となる。但し，

$$A=K^{-2}a^{-2}2^{-d}\pi^{-d/2}\hat{A}\ ,\quad B=K^{-2}a^{-d/\sigma-1}2^{-d}\pi^{-d/2}\hat{B}\ ,$$

$$C=K^{-3}a^{-3}2^{-d}\pi^{-d/2}\hat{C}\ ,\quad D=K^{-3}a^{-2-d/\sigma}2^{-d}\pi^{-d/2}\hat{D}\ ,$$

$$E'=K^{-3}a^{-(d+\sigma+2)/\sigma}2^{-d}\pi^{-d/2}\hat{E}'\ . \tag{15}$$

$$\hat{A}=\left[\Gamma\left(\frac{d-\sigma}{2}\right)\right]^2\Gamma\left(\sigma-\frac{1}{2}d\right)\Big/\left\{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\sigma\right)\right]^2\Gamma(d-\sigma)\right\}\ , \tag{16}$$

$$\hat{B}=-4\,\Gamma(2-d/\sigma)\,\Gamma(d/\sigma-1)\Big/\left\{\sigma\Gamma\left(\frac{1}{2}d\right)\right\}\ , \tag{17}$$

$$\hat{C}=\Gamma\left(\frac{d-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-2\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3\sigma-d}{2}\right)\Big/\left\{\Gamma(\sigma)\,\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(d-\frac{3\sigma}{2}\right)\right\}\ ,$$

$$\hat{D}=\frac{1}{2}\hat{B}\ ,$$

$$\hat{E}'=-\frac{(\sigma-d+2)(d-\sigma+2)}{d\sigma}\times\Gamma\left(3-\frac{d+2}{\sigma}\right)\Gamma\left(\frac{d+2}{\sigma}-2\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}d\right). \tag{18}$$

こうして，次の２通りの場合が存在する。

Case a)：$D<\sigma<2$．このときは，

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\frac{\mu(q)}{\nu(q)}d^dq\right)_{\log}=\left(K_d\int_{\xi^{1/\sigma}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\nu(q)}q^{d-1}dq\right)_{\log}$$

$$=\frac{AD-BC}{A^2}\frac{K_d}{\sigma}\xi^{d/\sigma-1}\ell n\,\xi. \qquad (19)$$

従って，χ_1 の対数発散の項は次式で与えられる：

$$(\chi_1)_{\log}=-\frac{2(\hat{A}\hat{D}-\hat{B}\hat{C})}{\hat{A}^2}\frac{\chi_0\,\ell n\,\xi}{B(2-d/\sigma,d/\sigma)};$$

$$B(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y). \qquad (20)$$

そこで，$\ell n\,\xi\simeq\{\sigma/(d-\sigma)\}\ell n(K_c-K)$ に注意すると，臨界指数 γ は次のように求まる：

$$\gamma=\sigma/(d-\sigma)+(1/n)\gamma_1+O(1/n^2),$$

$$\gamma_1=\{2\sigma/(d-\sigma)\}\cdot\{(\hat{A}\hat{D}-\hat{B}\hat{C})/\hat{A}^2\}/B(2-d/\sigma,d/\sigma). \qquad (21)$$

これは，一般に，$\frac{d}{\sigma}$だけの関数にはならず，今までの予想[8]は正しくないことがわかる。

Case b)：$\sigma=2$．このときには，(14)の第３項が第２項と同じ異常性を示すようになり，γ_1 は，次式で与えられる：

$$\gamma_1=4(d-2)^{-1}B^{-1}(2-d/2,d/2)\left[\{\hat{A}(\hat{D}+\hat{E}')-\hat{B}\hat{C}\}/\hat{A}^2\right]_{\sigma=2}. \qquad (22)$$

これは，Abe[6]やMa[6]によって得られた結果と一致する。

a)と b)の結果から，γ は $\sigma=2$ のところで σ に関して飛びが存在することになる。その飛び$\triangle\gamma_1$ は，次のようになる：

$$\triangle\gamma_1\equiv\gamma_1(\sigma=2)-\lim_{\sigma\to2-0}\gamma_1(\sigma)=2(d-4)(d-2)^{-2}$$
$$\times\left[B(2-d/2,d/2)B(d/2-1,d/2)\right]^{-1} \qquad (23)$$

また，臨界指数は，パラメタ a 即ち，格子の微細構造には依存しないことがわかる。さらに，$s>2$ では，potential − range s にも依らず，$s\to\infty$ のときの値をとる。この意味で，$s>2$ の相互作用を short − range potential と呼ぶことができる。

次に，Wilson にならって，ε − 展開を行う。我々の問題は

$$\varepsilon = d_c - d = 2(\sigma-\sigma_c) = 2\sigma - d\,, \tag{24}$$

と定義される。ε の一次までの結果は，次式で与えられる：$(\sigma>\frac{1}{2}d)$

$$2\nu = \gamma = 1+\frac{n+2}{n+8}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)+O(\varepsilon^2)\quad,\quad \eta = 2-\sigma+O(\varepsilon^2)\,,$$

$$\varphi = 1+\frac{n}{n+8}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)+O(\varepsilon^2)\,, \tag{25}$$

これをさらに $\frac{1}{n}$ − 展開すると，$\frac{1}{n}$ − 展開の結果で ε − 展開した式と $\frac{\varepsilon}{n}$ の次数までは完全に一致する。また (25) で，$\sigma\to 2-0$ とすると，明らかに Wilson[5] の結果と一致する。但し，$\triangle\gamma_1 \propto O(\varepsilon^2)$ であることに注意せよ。）

参　考　文　献：

1) K.G. Wilson and M.E. Fisher, Phys. Rev. Letters 28, 240 (1972)

2) K.G. Wilson, Phys. Rev. Letters 28 548 (1972).

3) M.E. Fisher and P. Pfeuty, Phys. Rev. (in press).

4) F. Wegner, Phys. Rev. (in press).

5) K.G. Wilson, Phys. Rev. B4, 3174, 3184 (1971).

6) R. Abe, Prog. Theor. Phys. (in press). (この研究会報告参照)
S. Ma は n − 成分ボーズ系で，Abe と本質的に同じ結果を得た。

7) H.E. Stanley, Phys. Rev. 176, 718 (1968).

8) G.S. Joyce, Phys. Rev. 146, 349 (1966).

9) M. Suzuki, Phys. Rev. Letters 28, 508 (1972).

10) L. Kadanoff and F. Wegner, Phys. Rev. B4, 3989 (1971).

11) J.F. Nagle and J.C. Bonner, J. of Physics C, 3, 352 (1970).